حل نموذج بجروت

(806)-581

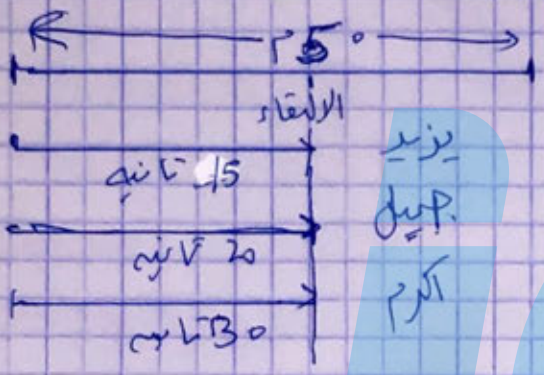
موعد شتاء 2022

معهد IQ

سؤال 1

بحسب المعطيات نفهم النقاط التالية :-

يوم الاحد بدأ أكرم مسار السباحة قبل جميل ويزيد
جميل انطلق بعد أكرم بـ 15 ثواني ويزيد انطلق بعد أكرم بـ 5 ثانية.
بعد 5 ثانية منذ بدأ يزيد السباحة وصل الثلاثة الى نفس النقطة.
وهذا معناه أنه بعد 30 ثانية من انطلاق يزيد كان الثلاثة على
نفس البعد من نقطة الانطلاق وبالتالي :-



حتى الالتقاء مسار يزيد 15 ثانية
مسار جميل 20 ثانية (انطلق 5 ثواني قبل يزيد)
مسار أكرم 30 ثانية (انطلق 5 ثانية قبل يزيد)

نفرض سرعة يزيد V_y م/ث
سرعة جميل V_j م/ث
سرعة أكرم V_A م/ث

إذاً نتحقق :

	سرعة	زمن	مسافة
أكرم	V_A	30	$30V_A$
جميل	V_j	20	$20V_j$
يزيد	V_y	15	$15V_y$

المسافة المقطوعة متساوية :

$$30V_A = 20V_j = 15V_y$$

$$\Rightarrow \boxed{V_j = 1.5V_A}$$

$$\boxed{V_y = 2V_A}$$

بعد الالتقاء تابع كل منهما السباحة ووصل جميل الى نهاية البركة
لمتدار وهادف في طريق عودته أكرم على بعد 4 أمتار
من نهاية البركة. وهذا معناه أنه في الالتقاء التالي بين
أكرم وجميل. قطع جميل مسافة $50+4 = 54$ متر
وأكرم قطع مسافة $50-4 = 46$. والزمن الكلي
لأكرم أكبر بـ 10 ثواني من الزمن الكلي لجميل.

www.IQsmart.co.il

	مسافة	زمن	سرعة
جميل	54	V_J	$\frac{54}{V_J}$
أكرم	46	V_A	$\frac{46}{V_A}$

بما أن زمن أكرم أكبر من زمن جميل بـ 10 ثوانٍ إذًا يتحقق:

$$\frac{54}{V_J} + 10 = \frac{46}{V_A}$$

بما أن $V_J = 1.5 V_A$ ⟸

$$\frac{54}{1.5 V_A} + 10 = \frac{46}{V_A}$$

$$\Rightarrow \frac{36}{V_A} + 10 = \frac{46}{V_A} \xrightarrow{(*V_A)} 36 + 10V_A = 46 \Rightarrow \boxed{V_A = 1}$$

إذًا سرعة أكرم 1 م/ث. نجد سرعة جميل وبزيد

سرعة جميل: $V_J = 1.5 V_A \Rightarrow V_J = 1.5 \cdot 1 = \boxed{1.5 \text{ م/ث}}$

سرعة بزيد: $V_y = 2V_A \Rightarrow V_y = 2 \cdot 1 = \boxed{2 \text{ م/ث}}$

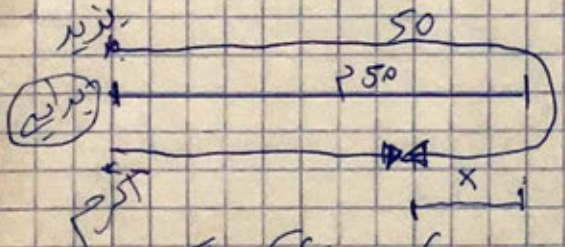
إذًا:

سرعة جميل = 1.5 م/ث // سرعة بزيد = 2 م/ث

سرعة أكرم 1 متر/ثانية

www.IQsmart.co.il

ب. بما أن بزيد أسرع من أكرم لذلك حتى الالتقاء للمرة الثانية



يقطع بزيد مسافة $X + 50$ متر

وأكرم يقطع $50 - X$ متر.

زمن بزيد = $\frac{X+50}{2}$

زمن أكرم: $50 - X$

⟸ الزمن الكلي لأكرم أكبر بـ 15 ثانية من زمن بزيد

$$\frac{X+50}{2} = \overbrace{50 - X}^{35-X} + 15 \Rightarrow X + 50 = 70 - 2X \Rightarrow 3X = 20$$

$$\boxed{X = 6\frac{2}{3}}$$

أي على بعد $6\frac{2}{3}$ متر من نهاية البركة يلتقي بزيد وأكرم للمرة الثانية.

(4)

بما أن جميل يزيد بداية السباحة معاً وكذلك انهيا السباحة معاً لذلك نفرض الزمن الكلي منذ البداية وحتى الالتقاء هو t.

المسافة الكلية التي قطعها يزيد هي $2t$

المسافة الكلية التي قطعها جميل هي $1.5t$

بما أنهم التقيا في بداية البركة إذا كل واحد منهم قطع البركة عدد زوجي من المرات (ذهاب وإياب ...).

أي ان الفرق بين المسافات المقطوعة سيساوي مسافة بركتان أي $2 \cdot 50 = 100$ متر. إي تتحقق:

$$2t - 1.5t = 100 \Rightarrow 0.5t = 100 \Rightarrow t = 200 \text{ ثانية}$$

وفي 200 ثانية يقطع يزيد مسافة $2 \cdot 200 = 400$ متر.

طريقة أخرى:

بما أن سرعة يزيد ضعف سرعة جميل كما قلنا بالبداية لذلك عندما يقطع يزيد طرفي البركة يقطع جميل نصف البركة لبنيي جدول يقارن عدد المرات التي يقطعها الاثنان بحيث هذا الجدول ينتهي عند المرة الأولى التي يلتقي الاثنان

عدد مرات البركة:

	يزيد	جميل
	2	1.5
	4	3
	6	4.5
	8	6

إذاً عندما يقطع جميل 6 مرات البركة يقطع يزيد 8 مرات البركة وعندها يلتقيان للمرة الأولى في بداية البركة بعد الانطلاق

$\Rightarrow$ مسافة يزيد: $8 \times 50 = 400$ متر.

سؤال 2

(1.P) بحسب المعطى $b_n = S_{n+1} - S_n$

وبما أن S_n هو مجموع أول n حدود في المتوالية a_n

إذاً يتحقق: $b_n = S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$

إذاً $b_n = a_{n+1}$

و $b_1 = S_2 - S_1 = a_2$

إذاً $b_1 = a_2$

وبالتالي المتوالية b_n هي متوالية حسابية فيها $b_1 = a_2$

وتحقق $b_n = a_{n+1}$ أي أساسها أيضاً d

(2.P) بحسب الشرح في البند (1) المتوالية b_n ليست مطابقة للمتوالية a_n لأن الحد الأول في المتوالية a_n أي a_1 ليس ضمن حدود المتوالية b_n.

(ب): بما أن المتوالية b_n حسابية وفرقها d أي:

$b_1 - b_2 = -d \quad / \quad b_3 - b_4 = -d \quad / \quad \dots \quad / \quad b_{n-1} - b_n = -d$

وبالتالي:

$$T_n = \frac{(b_1+b_2)(b_1-b_2) \dots (b_{n-1}+b_n)(b_{n-1}-b_n)}{-d}$$

$$T_n = \frac{(b_1+b_2)(-d) + (b_3+b_4)(-d) + \dots (b_{n-1}+b_n)(-d)}{-d}$$

$$T_n = \frac{-d\left[(b_1+b_2)+(b_3+b_4)+\dots(b_{n-1}+b_n)\right]}{-d}$$

$$\boxed{T_n = b_1+b_2+b_3+b_4+\dots+b_n}$$

إذاً T_n هو مجموع أول n حدود في المتوالية الحسابية

www.IQsmart.co.il

من البند (ب) ⑧

$$T_n = \frac{(b_1+b_2)(b_1-b_2) + \dots + (b_{n-1}+b_n)(b_{n-1}-b_n)}{-d}$$

$$T_n = \frac{b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \dots + b_{n-1}^2 - b_n^2}{-d}$$

بما أن: $b_1^2 + b_2^2 + b_3 - b_4^2 + b_5^2 - \dots + b_{39}^2 - b_{40}^2 = -95$

إذًا $T_{40} = \frac{b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_{39}^2 - b_{40}^2}{-d} = \frac{-95}{-d}$

أي يتحقق أن $\boxed{T_{40} = \frac{95}{d}}$

في كل مرة أجد مجموع الحدود الأولى لمتوالية b_n حيث n عدد زوجي

يكون مجموع الحدود لمتوالية الحسابية هو:

$$T_{40} = \frac{40}{2}[2b_1 + 39 \cdot d] = 20[2b_1 + 39d] = \frac{95}{d}$$

إذًا: $\boxed{* \; 20[2b_1 + 39d] = \frac{95}{d}}$

www.IQsmart.co.il

كذلك بما أن:

$$T_5 = -20 = \frac{5}{2}[2b_1 + 4d] = -20$$

$$T_5 = 2.5[2b_1 + 4d] = -20 \Rightarrow ** \; \boxed{2.5[2b_1 + 4d] = -20}$$

$$\Rightarrow * \; 20[2b_1 + 39d] = \frac{95}{d}$$

$$\Rightarrow 2b_1 + 39d = \frac{95}{20d} \Rightarrow \boxed{2b_1 + 39d = \frac{4.75}{d}} \; *$$

$$\Rightarrow ** \Rightarrow 2.5[2b_1 + 4d] = -20$$

$$\Rightarrow 2b_1 + 4d = \frac{-20}{2.5} \Rightarrow \boxed{2b_1 + 4d = -8} \; **$$

$$\Rightarrow \boxed{2b_1 = -8 - 4d} \; **$$

إذاً توصلنا الى معادلتين بمتغيرين :-

$$\begin{cases} * \quad 2b_1 + 39d = \frac{4.75}{d} \\ ** \quad 2b_1 = -8 - 4d \end{cases}$$

نعوض $-8-4d$ من المعادلة ** بدلاً من $2b_1$ في *

$$\hookrightarrow -8-4d+39d = \frac{4.75}{d} \Rightarrow -8+35d = \frac{4.75}{d}$$

$$(\times d) \Rightarrow -8d+35d^2 = 4.75 \Rightarrow 35d^2 - 8d = 4.75$$

نحل المعادلة التربيعية نحصل على :

$$\boxed{d_1 = 0.5} \qquad \boxed{d_2 = \frac{-19}{70}}$$

ولكن بما ان المتوالية A هي تصاعدية وفرقها هو d ايضاً.

لذلك d موجب أي نلغي الحل $d = \frac{-19}{70}$ X

وبالتالي فرق المتوالية هو :

$$\therefore \boxed{d = 0.5}$$

نجد b_1

$$2b_1 = -8 - 4d = -8 - 4.(0.5)$$

$$\Rightarrow 2b_1 = -8 - 2 = -10 \Rightarrow \boxed{b_1 = -5}$$

www.IQsmart.co.il

د. الاماكن الفردية في المتوالية A هي $a_1, a_3, \ldots, a_{\text{فردي}}$

الحد الأول في هذه المتوالية هو a_1 وفرقها هو $2d$ أي 1

نجد a_1

$$b_1 = a_2 = -5 \Rightarrow -5 = \underbrace{a_1 + d}_{a_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_1 = -5.5}$$

اذاً المتوالية في الاماكن الفردية هي المتوالية التي حدها الاول -5.5 وفرقها 1

نجد في مجموع حدود هذه المتوالية هو 0.

ومن ثم نتحقق من عدد الحدود التي يعطينا مجموع المجموع توافقه

$$S_{n=0} = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)\cdot 1\right]$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}\left[2\cdot(-5.5) + n - 1\right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}\left[-11 + n - 1\right] = 0 \Rightarrow \frac{n}{2}\left[-12 + n\right] = 0$$

$$\Downarrow \text{ أو } \Downarrow$$

$$\frac{n}{2} = 0 \qquad -12 + n = 0$$

لا يمكن أن يكون $n = 0$.

$$\Downarrow$$

$$\boxed{n = 12}$$

إذًا مجموع أول 12 حد هو 0

بما أن السؤال يبحث عن أقل عدد من الحدود الذي يعطينا مجموع عدد صحيح موجب لذلك نفحص أولاً S_{13} ثم S_{14} هل نحصل على مجموع عدد صحيح

$$S_{13} = \frac{13}{2}\left[\underbrace{2(-5.5)}_{-11} + \underbrace{(13-1)\cdot 1}_{12}\right] = 6.5\cdot[1] = 6.5$$

ليس عددًا صحيحًا

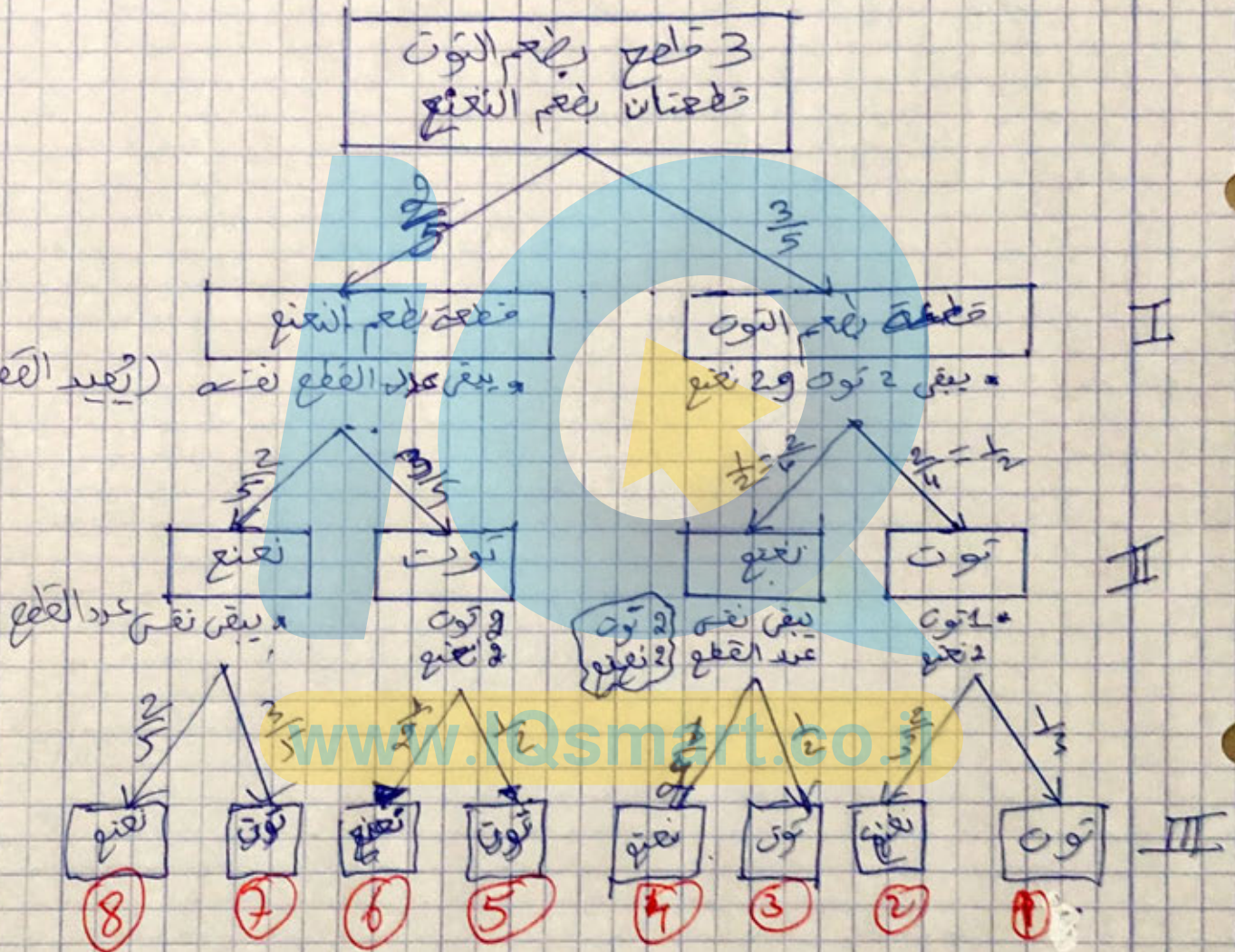
$$S_{14} = \frac{14}{2}\left[2(-5.5) + (14-1)1\right] = 7\cdot[2] = 14$$

إذًا $S_{14} = 14$ وبالتالي يجب أن نجمع 14 حد من حدود المتوالية الجديدة المنبثقة من الحدود في الأماكن الفردية من المتوالية A التي نصل الى مجموع موجب.

www.l0smart.co.il

سؤال 3

A. بحسب معطيات السؤال يوجد في العلبة 5 قطع حلوى:
3 قطع بطعم التوت و 2 قطع بطعم النغنغ.
كريم يختار 3 قطع حلوى الواحدة تلو الأخرى. إذا كانت القطعة بطعم التوت يأكلها وإذا كانت قطعة بطعم النغنغ يعيدها إلى العلبة. نبني شجرة تعبّر عن الوضع الموصوف



الاحتمال أن يأكل كريم قطعة واحدة، هو الاحتمال أن تكون قطعة واحدة من القطع التي يختارها توت وقطعتان نغنغ.
وهذا الوضع ملائم للتفرعات (4) أو (6) أو (7)

$$P\left(\begin{matrix}\text{قطعة}\\ \text{واحدة}\\ \text{توت}\end{matrix}\right) = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{183}{500} = \boxed{0366}$$

www.IQsmart.co.il

(2) P الاحتمال المطلوب هو: $P(\text{أكل القطعة الثانية} \mid \text{أكل قطعة واحدة فقط}) = ?$

(ج) الوضع الذي يأكل فيه القطعة الثانية هو التفرع والاحتمال المطلوب هو

$$P(\text{أكل القطعة الثانية} \mid \text{أكل قطعة واحدة فقط}) = \frac{P(\quad \cap \quad)}{P(\text{أكل قطعة واحدة})} = \frac{P(\text{سقوط})}{P(\text{أكل قطعة واحدة})} = \frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}}{0.366}$$

$$\boxed{P(\text{أكل القطعة الثانية} \mid \text{أكل قطعة واحدة فقط}) = 0.327 = \frac{20}{61}}$$

(ب) الاحتمال أن يأكل كريم قطعة واحدة على الأقل من n قطع حلوى عبارة عن الاحتمال المكمل للحدث أن لا يأكل كريم أي قطعة حلوى

$$P(\text{أكل على الأقل قطعة واحدة}) = 1 - P(\text{لا يأكل أي قطعة}) = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

(أ) بحسب المعطيات يأخذ كريم 3 قطع حلوى من العلبة الأولى و 3 قطع من العلبة الثانية ونسأل عن الاحتمال أن يأكل 3 قطع حلوى من نفس العلبة.

الاحتمال المطلوب يمكن أن يتحقق بطريقتين:

طريقة (I): أن يخرج من العلبة الأولى 3 توت ومن الثانية 3 نغنغ

طريقة (II): أن يخرج من العلبة الأولى 3 نغنغ ومن الثانية 3 توت

وهنا الاحتمال هو:

$$P(\text{أكل 3 قطع}) = \underbrace{2}_{\text{الاحتمال متساوي للطريقتين}} \cdot \underbrace{P(\text{3 توت})\cdot P(\text{3 نغنغ})}_{\text{I: 3 توت من العلبة I و 3 نغنغ من العلبة II}} = \underbrace{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}_{\text{3 توت}} \cdot \underbrace{\left(\frac{2}{5}\right)^3}_{\text{3 نغنغ}} = \boxed{\frac{8}{625}}$$

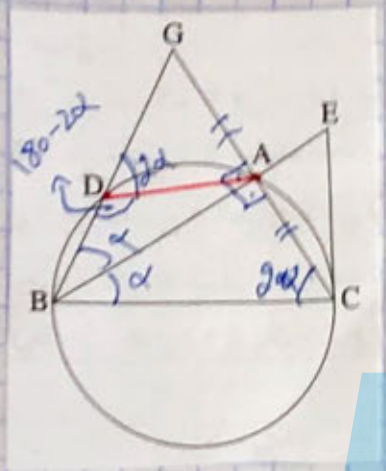
نقرأ بـ 2

www.IQsmart.co.il

سؤال 4

نعيد الصياغة

ABC مثلث محصور داخل دائرة قطرها BC.
G نقطة على امتداد AC بحيث: AC = GA
D هي نقطة تقاطع BG مع الدائرة.



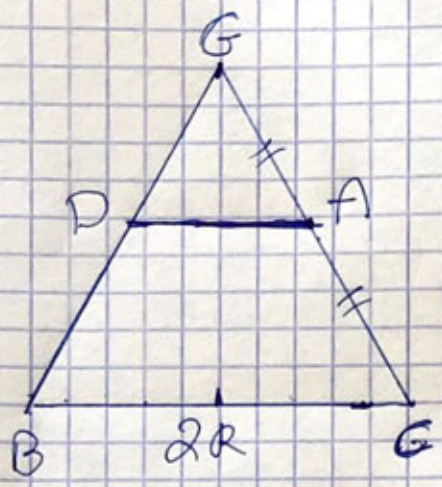
أ. $\angle A = 90°$ معطية مقابلة القطر BC
$AC = AG$ معطى
إذًا في ΔBGC تحقق:
AB هو متوسط وارتفاع على الضلع GC
إذًا المثلث BGC متساوي الساقين
فيه $BG = GC$ (بحسب النظرية: إذا كان في مثلث ما الارتفاع على أحد الأضلاع ينصف الضلع (متوسط) إذًا المثلث متساوي الساقين)

وبما أن الارتفاع على القاعدة (GC) في المثلث المتساوي الساقين ينصف زاويه الرأس إذًا AB ينصف $\angle BGC$
(P) وهو المطلوب

ب. نرسم AD.

في المثلث BGC، $\angle B = \angle C = 2\alpha$ (متساوي الساقين)
ABDC هو شكل رباعي محصور داخل دائرة
ولذلك مجموع كل زاويتين متقابلتين $180°$.
$\angle ADB = 180 - 2\alpha$
وبالتالي $\angle ADG = 2\alpha$ (مكملة لـ $\angle ADB$).
إذًا في المثلثين ΔGAD و ΔGBC تحقق:
$\angle G$ مشتركة للمثلثين و $\angle GBC = \angle GDA = 2\alpha$
$\angle DGA = \angle BGC$
إذا تشابه المثلثان P حسب نظرية التشابه (زز)
$\Delta GBC \sim \Delta GAD$
(ت) وهو المطلوب

www.IQsmart.co.il



ב. נתון כי: $\frac{S_{\Delta DBCA}}{S_{\Delta GAD}} = 15$

$S_{\Delta GBC} = \underbrace{S_{\Delta GDA}}_{a} + \underbrace{S_{DBCA}}_{15a} = 16a$

לכן:

$\frac{S_{\Delta GBC}}{S_{\Delta GAD}} = \frac{16a}{a} = 16$

בשאלה (ב) משולשים GBC ו-GAD דומים (ראה הוכחה) לכן היחס בין שטחיהם הוא ריבוע היחס בין אורכי הצלעות המתאימות:

מדמיון המשולשים נובע כי: $\frac{BG}{AG} = \frac{GC}{GD} = \frac{BG}{AD}$

$\left(\frac{BC}{AG}\right)^2 = 16 \Leftarrow \boxed{\frac{BC}{AG} = 4} \Leftarrow \boxed{\frac{2R}{AG} = 4}$ *

ובמילים: מנוסחה

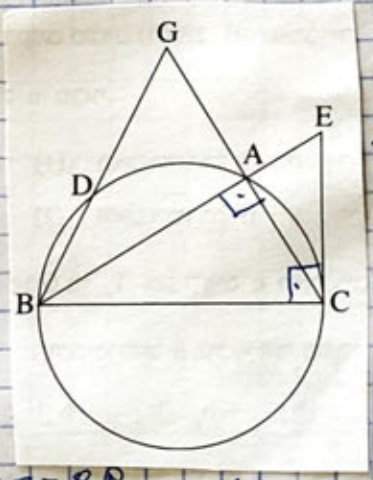
מכיוון ש: $\boxed{AG = AC}$ ו- $\boxed{\frac{2R}{AG} = 4}$ * לכן:

$AC = AG = \frac{2R}{4} = \frac{R}{2} \Rightarrow \boxed{AC = \frac{R}{2}}$

ומכאן נובע הטענה (ב.1)

www.IQsmart.co.il

א. נבנה את הגובה EC מהמשולש הנתון ו-E נמצאת על המשך הצלע BA.



$\angle BCE = 90°$ הזוויות בין המשיק והקוטר הן $90°$

לכן: $\Delta BCE \sim \Delta BAC$ (ז.ז)

$\angle ABC = \angle EBC$, $\angle BCE = \angle BAC = 90°$

נפל הזוויות

מן הדמיון נובע כי: $\boxed{\frac{BC}{BA} = \frac{CE}{AC} = \frac{BE}{BC}}$ * *

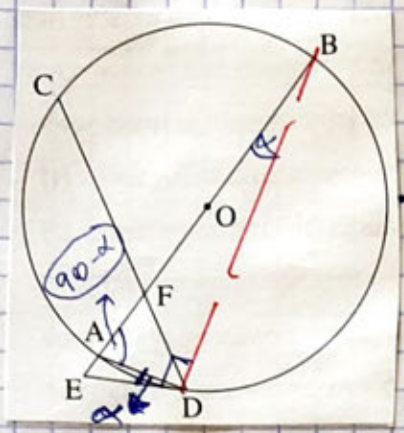
נחשב לפי משפט פיתגורס: $AB^2 + AC^2 = BC^2$

$\Rightarrow AB^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = (2R)^2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{AB = \frac{\sqrt{15}R}{2}}$

נציב בנוסחה של BE ונמצא את BE: $BE = \frac{8R}{\sqrt{15}}$

$\Rightarrow \frac{S_{\Delta BCE}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{BE \cdot AC \cdot (0.5)}{AB \cdot AC \cdot (0.5)} = \frac{BE}{AB} = \left(\frac{8R}{\sqrt{15}}\right) : \left(\frac{\sqrt{15}R}{2}\right) = \boxed{\frac{16}{15}}$

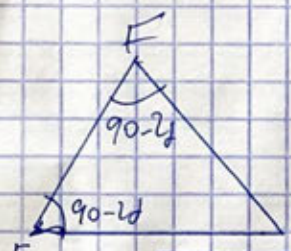
سؤال 5



נתון:
O מרכז המעגל, AB קוטר
ED משיק למעגל בנקודה D
CD חותך במעגל ומקביל לקוטר AB.
$\measuredangle ADE = \alpha$

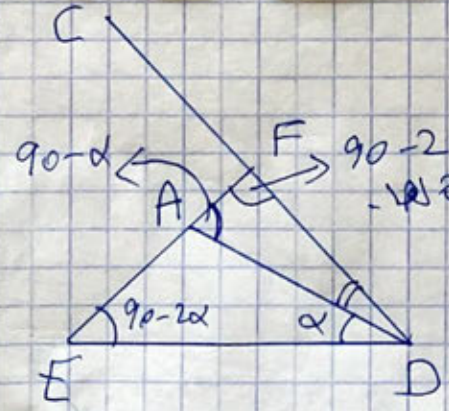
א. נרשום את הקוטר BD.
$\measuredangle ABD = \measuredangle ADE = \alpha$ הזוויות ההיקפיות הנשענות על אותה קשת שווה
בין משיק ומיתר שווים זוויות היקפיות המקבילות לקשת המיתר.
$\measuredangle BDA = 90°$ בהתאם למשפט הקוטר
$\triangle ADB$ בהתאם $\boxed{\measuredangle BAD = 90-\alpha}$ (סכום זוויות המשולש $180°$)

ב. נסמן את $ED = FD$ ונוכיח $DEFD$ משולש שווה שוקיים
$\measuredangle BDE = \measuredangle BDA + \measuredangle ADE = 90 + \alpha$
$\measuredangle BDE = 90 + \alpha$
$\triangle BDE$: $\measuredangle BED = 180 - \measuredangle BDE - \measuredangle B$ $(90+\alpha)$ α
$\measuredangle BED = 90 - 2\alpha$



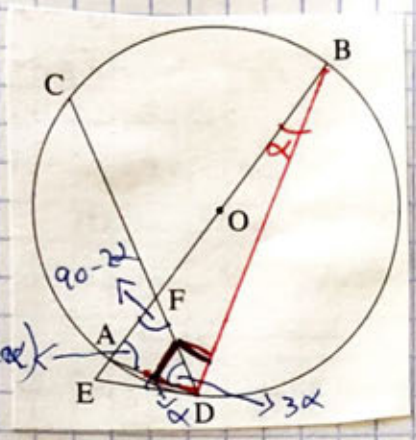
מאחר ש $\triangle EFD$ משולש שווה שוקיים
$\boxed{\measuredangle EFD = \measuredangle FED = 90-2\alpha}$ אז $\boxed{\measuredangle EFD = 90-2\alpha}$

אז במשולש AFD מתקיים:



$\measuredangle FAD = 90 - \alpha$
מחיבור זוויות במשולש AED
סכום הזוויות הפנימיות שווה ל $180°$.
אז $\measuredangle ADF = 180 - (90-\alpha) - (90-2\alpha)$
$\boxed{\measuredangle ADF = 3\alpha}$

www.iqsmart.co.il



א. במשולש ADB מתקיים:

$$\frac{AD}{\sin\alpha} = 2R$$

$$\Rightarrow \boxed{AD = 2R\cdot\sin\alpha}$$

במשולש AFD מתקיים:

$$\frac{AD}{\sin(90-2\alpha)} = \frac{FD}{\sin(90-\alpha)}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{\cos 2\alpha} = \frac{FD}{\cos\alpha} \Rightarrow \frac{2R\sin\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{FD}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow FD = \frac{2R\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{R\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{FD = R\cdot tg2\alpha}$$

$$S_{\triangle AFD} = \frac{AD\cdot FD}{2}\cdot\sin\angle FDA$$

$$S_{\triangle AFD} = \frac{1}{2}\cdot 2R\sin\alpha\cdot tg2\alpha\cdot(R)\cdot\sin 3\alpha$$

$$\boxed{S_{\triangle AFD} = R^2\cdot\sin\alpha\cdot tg2\alpha\cdot\sin 3\alpha}$$

ב. (1.5)

$$\frac{S_{\triangle AFD}}{S_{\triangle AED}} = \frac{\frac{1}{2}AD\cdot FD\cdot\sin 3\alpha}{\frac{1}{2}AD\cdot ED\cdot\sin 2\alpha}$$

$EF = FD$

$$\boxed{\frac{S_{\triangle AFD}}{S_{\triangle AED}} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha}}$$

www.10smart.co.il

ب) $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}} = 1+\sqrt{3}$ أن بين (2.5)

$$\frac{S_{AFD}}{S_{AED}} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = 1+\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin(\alpha+2\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha + \cos\alpha\cdot\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha + \cos\alpha\cdot 2\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{\sin\alpha[\cos 2\alpha + 2\cos^2\alpha]}{\sin\alpha} = 1+\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha + 2\cos^2\alpha = 1+\sqrt{3}$$

$$\downarrow$$

$$2\cos^2\alpha - 1 + 2\cos^2\alpha = 1+\sqrt{3}$$

$$4\cos^2\alpha = 2+\sqrt{3} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{\sqrt{3}+2}{4}$$

$$\cos^2\alpha = 0.933$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{0.933} = \pm 0.9659$$

وبما أن α زاوية حادة تحقق $0<\alpha<90$ فإن $0<\cos\alpha$

لذلك نلغي الحل السالب.

$$\cos\alpha = 0.9659$$

$$\boxed{\alpha = 15}$$

www.iqsmart.co.il

حل سؤال 6

$f(x)=\frac{x^2}{(x^3-m)^2}$ لدينا m موجب

مجال تعريف الدالة $x^3-m\neq 0 \Leftarrow x^3\neq m$

$\hookrightarrow x=\sqrt[3]{m}$

2.ا بما أن البسط (x^2) في الدالة لن يساوي 0 في $x=\sqrt[3]{m}$

لذلك $\boxed{x=\sqrt[3]{m}}$ هو خط تقارب عمودي

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim \frac{x^2}{(x^3-m)^2} \to \frac{x^2}{x^6} \to \frac{1}{x^4}=0$$

$x\to\infty$ $\quad x\to\infty$

إذاً $y=0$ هو خط تقارب أفقي للدالة $f(x)$ $(x\to\pm\infty)$

ب. يجب إثبات أن $f'(-1)=0$ لأن $x=-1$ هي نقطة تحول للدالة

$$f'(x)=\frac{-2x\cdot(x^3-m)^2-x^2\cdot[2(x^3-m)\cdot(3x^2)]}{(x^3-m)^4}$$

$$f'(x)=\frac{2x(x^3-m)^2-6x^4(x^3-m)}{(x^3-m)^4}=\frac{(x^3-m)[2x(x^3-m)-6x^4]}{(x^3-m)^4}$$

$$f'(x)=\frac{(x^3-m)[2x^4-2xm-6x^4]}{(x^3-m)^4}=\frac{(x^3-m)[-2(mx+2x^4]}{x^3-m}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-2x(x^3-m)(m+2x^3)}{(x^3-m)^4}} \Rightarrow f'(-1)=0$$

$$\Rightarrow f'(-1)=-2(-1)((-1)^3-m)(m+2(-1)^3)=0 \Rightarrow 2(-1-m)(m-2)=0$$

$\boxed{m=2}$ ✓ أو $\boxed{m=-1}$ ✗ غير ممكن لأن m موجب.

www.iqsmart.co.il

$$f(x)=\frac{x^2}{(x^3-2)^2}$$

الحل:

$$f'(x)=\frac{(x^3-2)(-2x)(2+2x^3)}{(x^3-2)^4}=\frac{-4x(x^3-2)(1+x^3)}{(x-2)^3}$$

أ - النقاط الحرجة تحقق $f'(x)=0$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{(x^3-2)(-4x)(1+x^3)}{(x-2)^3}=0$$

$x^3-2=0$ أو $-4x=0$ أو $1+x^3=0$

أي أن $x=\sqrt[3]{2}$ أو $x=0$ أو $x=-1$

نصنف النقاط بواسطة جدول:

x	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<0$	$x=0$	$0<x<\sqrt[3]{2}$	$x=\sqrt[3]{2}$	$x>\sqrt[3]{2}$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	//	−
$f(x)$	↗	max	↘	min	↗	//	↘

$x=-2$ $\quad x=-\frac{1}{2}$ $\quad x=1$ $\quad x=2$

$f'(-2)>0$

$f(0)=0$ min $(0,0)$

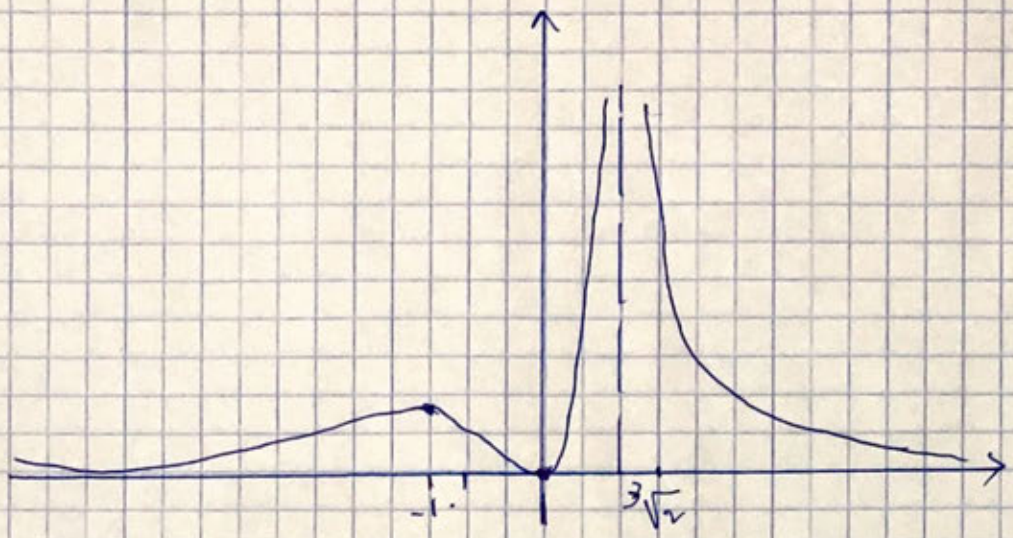
$f'(-\frac{1}{2})<0$

$f(-1)=\frac{1}{9}$ max $(-1,\frac{1}{9})$

$f'(1)>0$

$f'(2)<0$

www.IQsmart.co.il



(ب) $g(x)=K.f(x)$: $K<0$

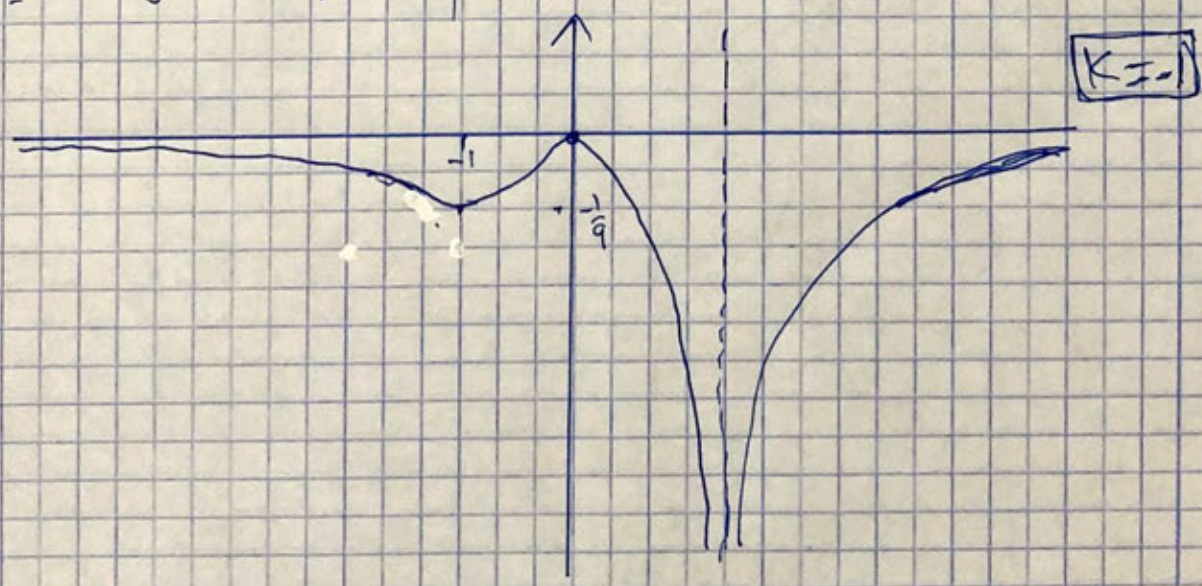
بما أن $f(x)$ موجبة و $K<0$ لذلك $g(x)$ ستكون سالبة في كل مجال تعريفها. (مجال تعريف $g(x)$ هو نفس مجال تعريف $f(x)$)

* بما أن خط التقارب الأفقي هو $y=0$ لذلك أيضاً للدالة $g(x)$ خط التقارب الأفقي هو $y=0$

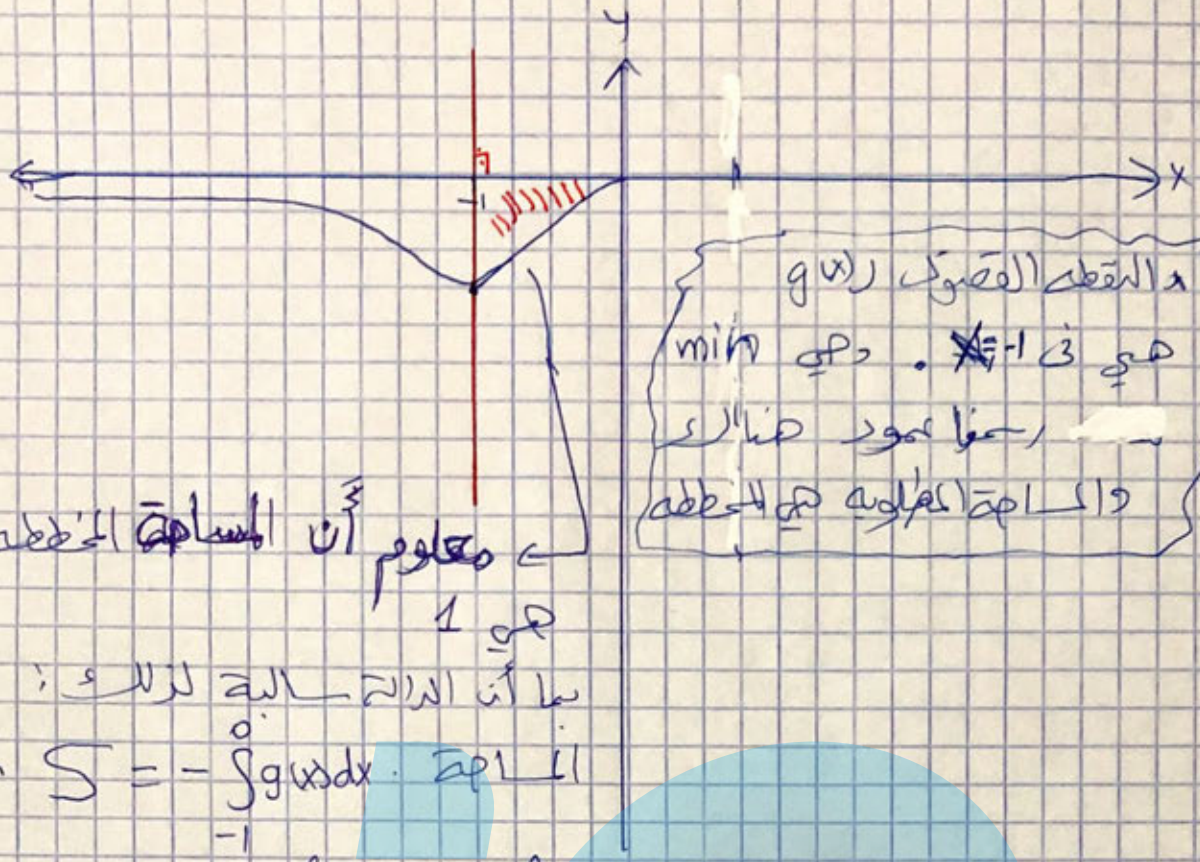
* خط التقارب العمودي نفسه $x=\sqrt[3]{2}$

* الأحداثي x للنقاط القصوى نفسه ولكن بما أن K سالب لذلك نوع النقطة سيتغير والمجالات التصاعدية والتنازلية ستتبدل.

* إذا فرضنا $K=-1$ إذاً الرسم البياني لـ $g(x)$ سيكون كالتالي



www.IQsmart.co.il



2. ب)

* النقطة المقصود لـ $g(x)$ هي $x=-1$. وهي min محليا ، وهو عمود هذا لأن الدالة المقلوبة هي الخطة

معلوم أن المساحة المحصورة بين الخط $y=1$ و

بما أن الدالة سالبة لذلك :

$$S = -\int_{-1}^{0} g(x)dx$$ الى

$$1 = -\int_{-1}^{0} \overbrace{k \cdot f(x)}^{g(x)} dx = -k\int_{-1}^{0} f(x)dx = -k\int \frac{x^2}{(x^3-2)^2}dx =$$

البسط x^2 هو $\frac{1}{3}\cdot(x^3)'$ اي $\frac{1}{3}$ ـ مقدر الدالة المركبة في المقام

لذلك يمكن كتابة التكامل كالتالي

$$1 = -k\int \frac{x^2}{(x^3-2)^2} = -k\int \frac{1}{3}\cdot\frac{u'}{u^2}dx = -k\cdot\frac{1}{3}\int \frac{u'}{u^2}dx = \left[-\frac{k}{3}\cdot\frac{-1}{u}\right]_{-1}^{0}$$

$$\Rightarrow 1 = -\left[\frac{k}{3u(x)}\right]_{-1}^{0} = \left[\frac{k}{3(x^3-2)}\right]_{-1}^{0} \Rightarrow 1 = \left[\frac{k}{3(0-2)} - \frac{k}{3[(-1)^3-2]}\right]$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{k}{-6} - \left(\frac{-1}{9}\right)k \Rightarrow 1 = k\left(\frac{-1}{6}+\frac{1}{9}\right) \Rightarrow 1 = k\left(\frac{-1}{18}\right)$$

$$\Rightarrow +18 = -k \Rightarrow \boxed{k=-18}$$

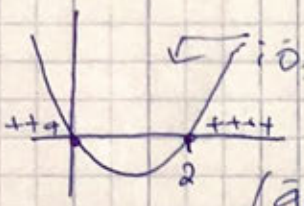
www.iqsmart.co.il

حل سؤال 7

$$f(x)=3x+2\sqrt{x^2-2x}$$

(1.P) مجال تعريف الدالة هو كل x يُحقق أنّ $x^2-2x\geq 0$

و x^2-2x عبارة عن دالة تربيعية من الصورة: ax^2+bx+c



ومجال التعريف هو المجال الموجب للدالة التربيعية

اي $\boxed{x\geq 2 \quad \text{أو} \quad x\leq 0}$ (يشمل النقاط الصفرية).

(2.P) نجد أولاً $f'(x)$:

$$f'(x)=3+\frac{2\cdot(2x-2)}{2\sqrt{x^2-2x}}=3+\frac{2(x-1)}{\sqrt{x^2-2x}}$$

$$f'(x)=3+\frac{2(x-1)}{\sqrt{x^2-2x}}$$

ومجال تعريف $f'(x)$ هو $x^2-2x>0$ وحل المتراجحة

الدالة التربيعية هي البند (1.P) فمجال تعريف $f'(x)$ هو

$$\boxed{x<0 \quad \text{أو} \quad x>2}$$

(3.P) خط التقارب العمودي - نفحص أطراف المجال $x=0$ ، $x=2$

$$f'(0)=3+\frac{2(0-1)}{\sqrt{0}}\neq\frac{0}{0}$$

لذلك ليس ثقب انما خط تقارب عمودي $\boxed{x=0}$

$$f'(2)=3+\frac{(2-1)}{\sqrt{2^2-2\cdot2}}\neq\frac{0}{0}$$

إذاً $\boxed{x=2}$ خط تقارب عمودي

خط التقارب الأفقي

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim 3+\frac{2(x-1)}{\sqrt{x^2-2x}}=3+\frac{2x}{|x|}$$

$$\Rightarrow_{x\to+\infty} 3+\frac{2x}{|x|}=5 \qquad // \qquad \underset{x\to-\infty}{} 3+2\frac{x}{(|x|)}=3-2=1$$

$\boxed{y=5}$ $\boxed{x\to+\infty}$ $\boxed{y=1}$ $\boxed{x\to-\infty}$ الأفقية

www.IQsmart.co.il

(4-P) تقاطع تقاطع مع المحاور :

مع المحور y ⇐ $x=0$ لا يوجد لأن الدالة غير معرفة في $x=0$

مع المحور x ⇐ $y=0$ ⇐ $3+\frac{2(x-1)}{\sqrt{x^2+2x}}=0$

$\hookrightarrow \frac{2(x-1)}{\sqrt{x^2+2x}} = -3 \Rightarrow 2(x-1) = -3\cdot\sqrt{x^2+2x}$

نربع الطرفين ← ولكن يجب أن نحدد بمعونة التعويض قبل ذلك لأن التربيع يجعل الطرفان موجبان، وبما أن الطرف الايمن من المعادلة $(-3\sqrt{x^2+2x})$ سالب إذاً يجب أن يتحقق أن الطرف الأيسر سالب أي $x-1<0$ ⇐ $\boxed{x<1}$

إذاً نحل المعادلة:

$$2(x-1) = -3\sqrt{x^2+2x}$$

تحت الشرط أن $x<1$ بالإضافة لشرط مجال تعريف الجذر أي $x>2$ أو $x<0$ وإذا جمعنا هذين الشرط كلاهما معاً $x<1$ و أيضاً $[x<0$ أو $x>2]$

الحل هو: $\boxed{x<0}$

إذاً يمكننا أن نربع الطرفين ونحل المعادلة الناتجة تحت شرط مجموعة التعويض الرائيه $x<0$

$$[2(x-1)]^2 = [-3\cdot\sqrt{x^2+2x}]^2$$

$$4(x-1)^2 = 9(\sqrt{x^2+2x})^2 \Rightarrow 4(x^2-2x+1) = 9(x^2+2x)$$

$$\Rightarrow 4x^2-8x+4 = 9x^2+18x \Rightarrow \Rightarrow \boxed{5x^2+10x-4=0}$$

نحل المعادلة نحصل على:

$x_1 = -0.34$ $\quad$ $x_2 = 2.342$ ← غير مقبول $x<0$

إذاً التقاطع مع x $(-0.34, 0)$

www.IQsmart.co.il

(5.1) معطى أنه للمشتقة $f'(x)$ لا يوجد نقاط حصول $f(x)$ أي أنه في كل فترة في مجال تعريفها تكون $f(x)$ تصاعدية او تنازلية. وسنحدد هل هي تنازلية او تصاعدية بحيث قيمة $f'(x)$ في كل مجال بالإضافة للنتائج السابقة:

بما أن $y=1$ هو خط تقارب أفقي عندما $x \to -\infty$

ولنقطة التقاطع مع المحور X هي $(-0.342, 0)$ أصغر من 1

لذلك في المجال $X<0$ الدالة بالصورة تنازلية.

بما أن $y=x$ هو خط تقارب للدالة $f(x)$ عندما $x \to \infty$

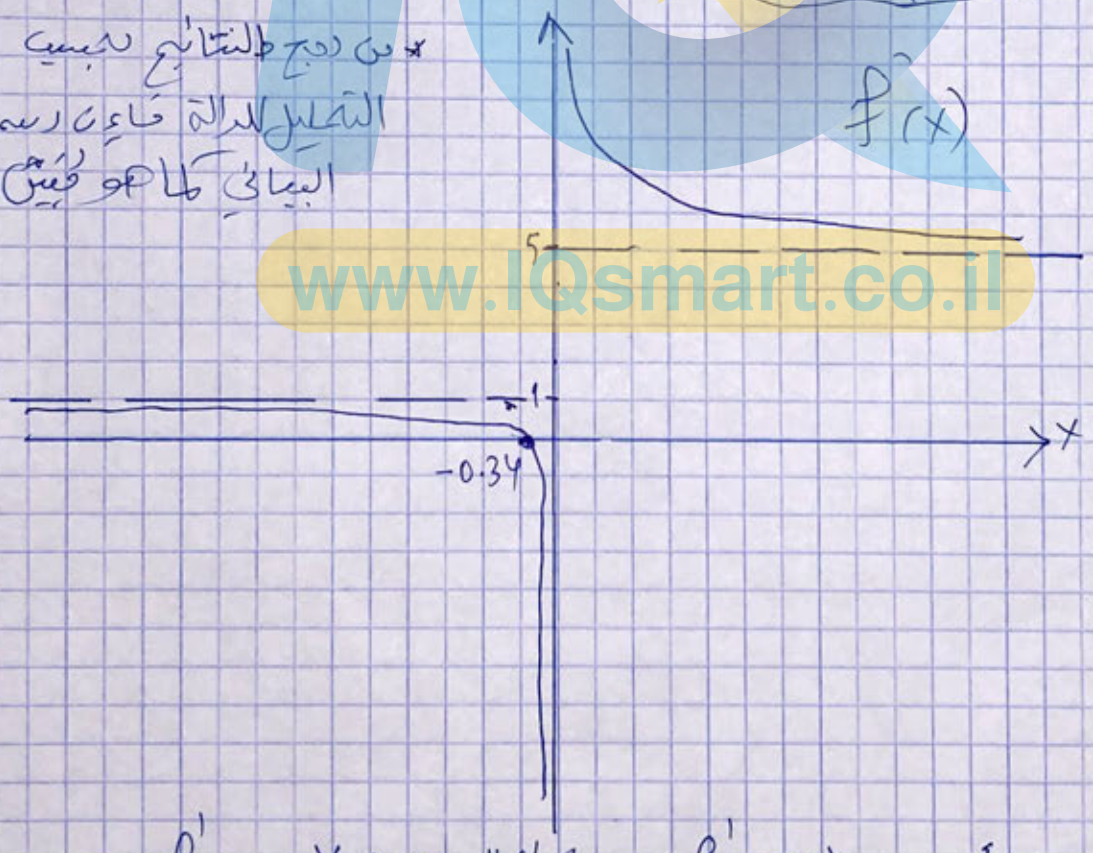
إذًا نفحص $f'(3)=?$ ونعوض بـ 3 هل الدالة $f(x)$ تصاعدية أو تنازلية:

$$f'(3) = 3 + \frac{2(3-1)}{\sqrt{3^2-2\cdot 3}} = 3 + \frac{4}{\sqrt{3}} = 6.309$$

وبالتالي $f'(3)>5$ لذلك الدالة $f'(x)$ تنازلية في $X>2$

خط التقارب $y=5$

* من دمج النتائج بتبسيط التحليل للدالة فإن الرسم البياني كما هو مبين



www.IQsmart.co.il

(1.5) بما أن $f'(-0.34)=0$ وفي المجال $X<-0.34$ فإن $f'>0$

وفي المجال $-0.34<X<0$ فإن $f'(x)<0$ عند $X=-0.34$ هي النقطة الحرجة للدالة $f(x)$.

نجد $f(-0.342)$

$$f(-0.34) = 3(-0.34) + 2(-0.34)\cdot\sqrt{(-0.34)^2 - 2(-0.34)}$$

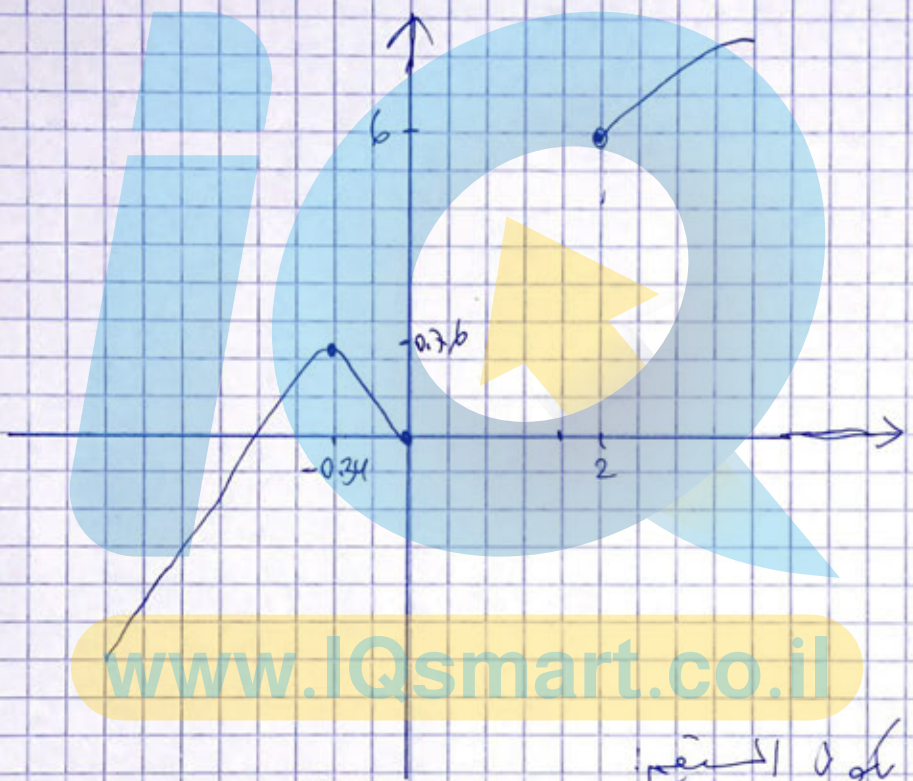
$$f'(-0.34) = 0.76$$

إذن: $f(x)$ متزايدة على المجال $(-0.34, 0.76)$

ب) نكمل رسم الدالة نقدر قيمة الدالة في أطراف المجال التعريف:

$$f(0) = 3\cdot 0 + 2\cdot 0\sqrt{0^2 - 2\cdot 0} = 0 \qquad (0,0)$$

$$f(2) = 3\cdot 2 + 2\cdot\sqrt{2^2 - 2\cdot 2} = 6 + 0 = 6 \Rightarrow (2,6)$$



www.IQsmart.co.il

د. نكمل نكون المستقيم:
$y = 4x + c$ مماس في نقطة فيجب أن تكون مماس
نقطة على الدالة فيكون ميل المماس هو 4. أي $f'(x) = 4$

$$f'(x) = 3 + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x^2-4x}} = 4 \Rightarrow \frac{2(x-1)}{\sqrt{x^2-4x}} = 1$$

بشرط التعويض: $x > 1$ تربيع الطرفين:

$$\frac{[2(x-1)]^2}{(\sqrt{x^2-4x})^2} = (1)^2 \Rightarrow \frac{4(x^2-2x+1)}{x^2-4x} = 1$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 8x + 4 = x^2 - 4x \Rightarrow 3x^2 - 4x + 4 = 0$$

هذه المعادلة لا يوجد حل للدالة لا يوجد مماس كما طلوب

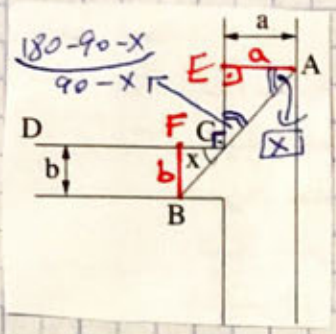
سؤال 8

نرسم AE يُعامد جدار القناة الرئيسية $AE=a$

ونرسم BF يعامد جدار القناة الفرعية $BF=b$

$\angle ECB = 90-x$ $\Leftarrow$ $\angle EAB = x$ (مجموع زوايا المثلث ΔECA هو 180)

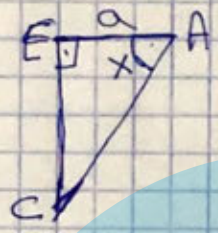
$(180-90-x)$



طول الـ AB هو:

$$AB = CB + AC$$

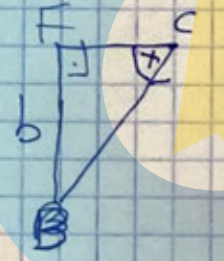
في ΔEAC لنتحقق:



$$\cos x = \frac{a}{AC}$$

$$\boxed{AC = \frac{a}{\cos x}}$$

في ΔFCB لنتحقق:



$$\sin x = \frac{b}{BC}$$

$$\boxed{BC = \frac{b}{\sin x}}$$

$$AB = AC + BC = \frac{a}{\cos x} + \frac{b}{\sin x}$$

$$\boxed{AB = \frac{a}{\cos x} + \frac{b}{\sin x}}$$

ب) $a=2b$ إذا: $AB = f(x) = \frac{2b}{\cos x} + \frac{b}{\sin x}$

$$f'(x) = 2b(-1)(-\sin x)\frac{1}{\cos^2 x} + b(-1)\cos x \frac{1}{\sin^2 x} = -\frac{b\cos x}{\sin^2 x} + \frac{2b\sin x}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{-b\cos x \cdot \cos^2 x + 2b\sin x \cdot \sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$$

www.IQsmart.co.il

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{-b\cos^3 x + 2b\sin^3 x}{\cos^2 x \cdot \sin^3 x}}$$

$f'(x) = 0$

$$-b\cdot\cos^3 x + 2b\sin^3 x = 0$$

$$\Rightarrow 2b\sin^3 x = b\cos^3 x$$

$$\frac{2\sin^3 x}{\cos^3 x} = 1 \Rightarrow \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (\operatorname{tg} x)^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{0.5}$$

$$\boxed{x = 38.439^\circ}$$

x	38°	38.439	39°
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	min	↗

$b = ?$ $\quad f(x) = 8$

$f(38.439) = 8$

$$f(38.439) = \frac{b}{\sin(38.439)} + \frac{2b}{\cos(38.439)} = 8$$

$$\frac{b}{0.6216} + \frac{2b}{0.783} = 8$$

$$0.783b + 1.243b = 3.893$$

$$2.026b = 3.893$$

$$b = \frac{3.893}{2.026}$$

$$\boxed{b = 1.9215}$$

www.iqsmart.co.il